～ 物理現象と微分方程式 ～

熊本大学工学部数理工学科

中 村　徹

～ 微分方程式とは？ ～

◎ 微分とは …

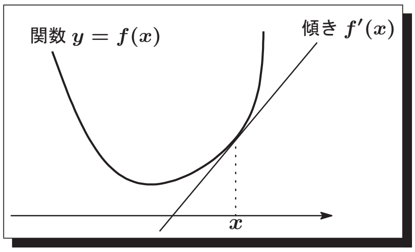
関数 $f(x)$ の点 x における 変化量 を求めること.

点 x における 接線の傾き に等しい.

記号は $\frac{d}{dx}f(x)$, $f'(x)$ などで表し 導関数 と呼ぶ.

関数 $\frac{d}{dx}f(x)$ をさらに微分して得られる関数を 2 階導関数 といい $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ で表す.

同様に 3 階導関数 $\frac{d^3}{dx^3}f(x)$ なども計算できる.



◎ 微分方程式 とは …

関数 とその 導関数 の関係式として得られる 方程式 のこと.

◎ 微分方程式を解く とは …

与えられた 微分方程式 を満たすような 関数 を求めること.

方程式 と聞いて連想するものは、例えば・・・

† 連立方程式：

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \overset{\text{解く}}{\Longrightarrow} x = 1,\ y = -2$$

† 2 次方程式：

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \overset{\text{解く}}{\Longrightarrow} \quad x = 1, 2$$

$\boxed{\text{方程式}}$
⇓ $\boxed{\text{解く}}$
$\boxed{\text{値}}$ が求まる

† 微分方程式の例：

関数 $f(x)$ についての 微分方程式

$$xf'(x) - f(x) + 1 = 0$$

を解くと, $f(x) = ax + 1$ (a は定数) が 解 として求まる.

（ 実際, $f(x) = ax + 1$ を微分すると $f'(x) = a$ となるので
$xf'(x) - f(x) + 1 = ax - (ax + 1) + 1 = 0$
となり, 確かに $f(x) = ax + 1$ は微分方程式を満たしている. ）

$\boxed{\text{解く}}$
⇓
$\boxed{\text{微分方程式}}$ ⟹ $\boxed{\text{関数}}$ が求まる！

～ なぜ微分方程式を解くのか？ ～

自然現象・物理現象 を 解明 したい！

- 天体の運動
- 水・空気の流れ
- 気象現象
- 熱の拡散
- 波の伝播
- 生物個体数の変化
- ⋮

物理法則 に基づいてモデルを作る

- ニュートンの運動方程式
- 質量保存則
- エネルギー保存則，等々

↓

微分方程式 の導出

↓ 解けば…

さまざまな 現象 を 解明 できる！

色々な 微分方程式 を コンピュータ を使って解いてみよう！

微分方程式の例 1 — 天体の運動 —

恒星 の周りを公転する 惑星 の運動を考える.

$\boxed{\text{運動方程式}}$ ＋ $\boxed{\text{万有引力の法則}}$

⇓

$$\underbrace{m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t)}_{\text{加速度 } a} = \underbrace{-G\frac{mM}{\|\vec{x}(t) - \vec{s}\|^2} \cdot \frac{\vec{x}(t) - \vec{s}}{\|\vec{x}(t) - \vec{s}\|}}_{\text{万有引力 } F} \tag{1}$$

m：惑星の質量，M：恒星の質量，G：万有引力定数，

t：時刻，$\vec{x}(t)$：惑星の位置ベクトル，$\vec{s}$：恒星の位置ベクトル.

微分方程式の例 2 — ローレンツ方程式 —

気象における大気の対流現象を表した近似モデル.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= -px(t) + py(t), \\ \frac{d}{dt}y(t) &= -x(t)z(t) + rx(t) - y(t), \\ \frac{d}{dt}z(t) &= x(t)y(t) - bz(t). \end{aligned} \tag{2}$$

(p, q, r, b：定数)

微分方程式 (2) $\overset{\text{解く}}{\Rightarrow}$ 時刻 t における点 $(x(t), y(t), z(t))$ の位置が分かる

◎ 点の挙動 … 微分方程式 (2) に支配されているにも関わらず，一見不規則
⇒ カオス 的な振る舞い

◎ 点の行き着く先 … 奇妙な図形が現れる (ローレンツ・アトラクタ)
⇒ フラクタル 構造を持つ

現象 をモデル化した 微分方程式

⇓ 解く（数学、コンピュータ）

時間変化に伴う空間内での 点の動き（惑星の運動など）が分かる

現象を記述する微分方程式には もっと複雑なもの もある.

⇓

$\boxed{\text{偏微分方程式}}$

ちなみに、先の例で挙げた微分方程式は 常微分方程式 という.

偏微分方程式 を解くと … 時間変化に伴う 関数の動き (?) が分かる.